GEOMETRIÆ POSTLIMINIVM



GEOMETRIÆ POSTLIMINIVM

AVTHORE

ANTONIO SANCTINIO LVCENSI

CONGREGATIONIS SOMASCHEN. AC ROMÆ IN ALMO GYMNASIO PROFESSORE.



S.M. in Portico  in Campitello

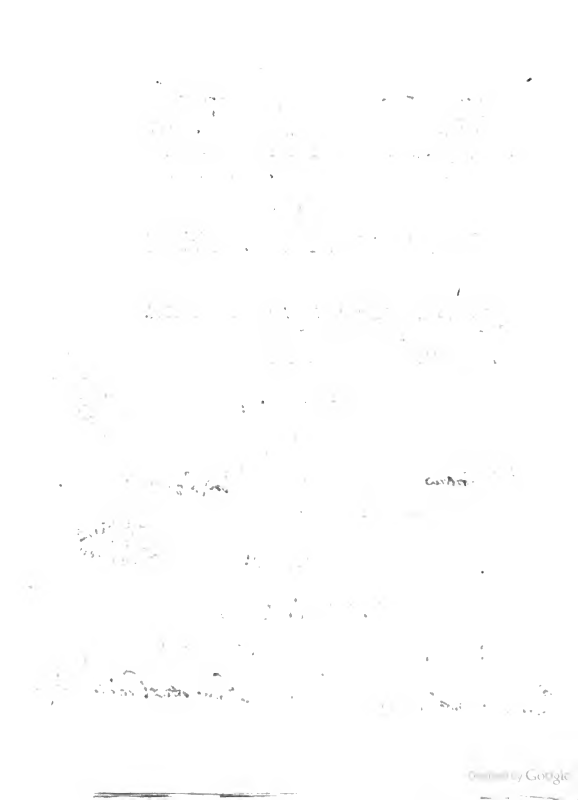


MACERATÆ,

Ex Typographia Philippi Camaccij. M.DC.LI.

Superiorum Permissu.

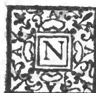
[illegible]



ILLVSTRISSIMO

ALBERTO CIVRANO PATRITIO VENETO.

A. SANCT. F. P.



ON equidem secundus tu fueras Illustrissime Vir inter eos, qui ad me detulerant, à nescio quodam illudi nostra, præsertim edita occasione paucorum problematum in Geometricis deficientium; Cumq; nostra pro eodem argumento, sententiæ omnium aduersaretur, haud ignarus esse potueram minimè defuturos, qui celerius rimas aliorum excalperent, quàm onus auferendi facultatis defectus, lacunasq; adæquandi in se susciperent; hoc scilicet vt arduum nimis; illud verò vt ad genium probaturos, neq; sanè nostri conceptus, vt arma sub pallio obscuro latitabant in loco, quin mediocri, vel mentis intentione illos retegi liceret; & quidem minimè moderati fuit laboris illos continere, nimirum ob quorundam instigationem ante præscriptum ne effugerent. Id circò ignotam prorsus concipere industriam nobis consilium fuit.. Vt ex Vegetio accepimus. Nulla sunt meliora consilia, quàm quæ ignorauerit aduersarius ante-

quam

quam facias: Et sanè vt mihi videtur non nullos fuisse, qui sibi suaserint, modico fuco nobis facto, protinus nos de campo eiecisse, & nihil virium reliquisse, at nimis à vero absunt; etenim breui interuallò eiusmodi dissipato fumo, absque fastu vllo, vel plausu ex areną se intelligent depulsos, cum scilicet ea constructa, ac munita acceperint problemata, quæ nimia confidentia fuerant olim à Geometria diuulsa. An verò intentùm assequuti, siue errabundi fuerimus inuenti, ex eorum iudicio pendet, qui in hisce familiaritèr se exercuerunt, cum laude, & sanè me latere minimè potuit, tùm ingenij indolè, tùm sedulitate studiorum, at ex vtroq; pro animi dotibus te comites excessisse tuos, siue in humanioribus disciplinis, ac politicis, siuè in hisce elegantioribus mathematum studijs, & hæc sanè vna fuit caussa, quæ me impulit, vt opusculum hoc tui nominis stemmate adornarem. Tibi igitur sisto, Decus ac Germen præclarum excelsæ eius Reipublicæ, quę Consilio, deliberatione, prudentia, ac vigilantia apud omnes nationes, se tam celebrem, quám insuperabilem fecit, ac in armorum expeditionibus, classiumue, adeò strenuem, vt in sui admirationem sceptra sublimium eripiat, & minora quippè obstupescant! Et quidem vt arbitror (neq; coniecturæ sit locus) id ex vnica tantùm apparet propagari ratione. Scilicet quia post pietatem erga superos, in Patritiorum vniuerso ordine nullus habeatur, qui cor-

di pro-

di profundius insitum retineat aliud, quàm quod Reip: expedire consultum fuerit. Et huic sanè videtur congruere illud Tullianum. Non potest cognatio vlla esse propior, quàm Patria: Documentum sanè vt maximum, ità ad sui prosperitatem vnicum, & quippè adeò in tua religiosè custoditum, quàm in amplissima olim Romanorum Rep: fuerat nimis neglectum. Nunc verò exempla aliundè petenda non duximus, cùm in tuis laribus, plurima maiorum, & præclara abundè sufficerent, at recentissimum habes, Bertuccius tuus nempè germanus frater. Cum in nauali classe, non nullis pręesset triremibus, post minimè pauca, generoseque gesta, nõ ne ęrumnis militaribusq; confectus laboribus naturæ concessit? hoc est dum Patriæ debitum persolueret obsequium gloriosè vitam sacrauit? magno sanè apud omnes relicto sui desiderio, magnoq; documẽto quales in Patriam Ciues debeant esse sui? at hęc alijs sinamus, vt decentius; nobiliore scilicet stilo posteris commendentur, historiarum monumentis. Opusculum interim hoc nostrum, qualecumq; sit illud, quod tibi offertur, meæ nimirum erga te obseruantiæ pignus, benigna hilariq; fronte accipias velim, qnod si à te factum intellexero, nil ambigo, vel ex hoc plurimum lucis, atq; splendoris sit illi, accessurum ex ijs nimirum, quod de te, veluti ex auroræ nascentis gloria erumpunt radijs. Vale. Romæ X V. Kal. Nouembris. 1651.

Ego infrascriptus perlegi hoc opus ab Authore R. P. D. Antonio Sauctinio nostræ Congregationis Sacerdote inscriptum, Geometriæ Postliminium, & nihil in eo reperi contra fidem, aut bonos mores; Ideò facultate super hoc specialiter mihi facta ab Adm. R. P. D. Paulo Carrara Præposito Generali nostræ Congregationis, vt Typis mandetur concedo, seruatis seruandis. In quorum fidem, &c. Romæ in Collegio S. Blasij 23. Augusti. 1651.

D. Petrus Paulus ab Ecclesia Procurator Generalis
Congregationis Somaschæ.

Si placet Illustriss. & Reuerendiss. D. D. Papirio de Siluestris Episcopo Maceratæ. Imprimatur Fr. Vincentius de Gulijs Min: Conuent: Sac. Theol. Magister, in Patria Vniu. phil. Profess.

Imprimatur. Ludouicus Signorius Vicarius, & Auditor Gener.

Hieronymus Spinuccius S. Saluatoris Canonicus, Phil. ac Sacræ Teologiæ Doctor, & S. Offic. Reuisor vidit, & approbat.

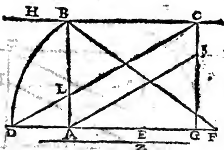
Imprimatur Fr: Io: Baptista Talianus Vic. S. Officij Maceratæ Ord. Prædicatorum.



PROBLEMA PRIMVM

Inter duas lineas rectas ad angulum inclinatas, præfinitam aliam ponere, quæ ad datum extra punctum pertineat.

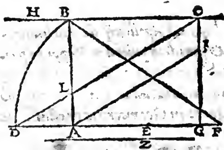
PRoblema hoc, est Apollonij de Inclinationibus, & quidem primum Pappi in prologuijs ad septimum collectionum librum, à nobis inductum aliàs, nunc verò ob eius insignem in Geometricis præstantiam atq; vsum rursus ad euidentiùs demonstrãdum iteratum. Sint itaq; AB, BC lineæ inclinatæ primùm ad angulum rectũ ABC: præfinita verò interponenda Z, adeò vt porrecta pertineat ad

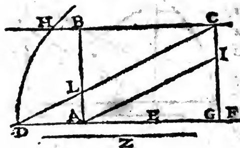


D punctum extra datum. Agatur DA parallela contra BC, cui, & indirectum DA accipiatur AF æqualis præfinitæ Z, quæ secetur bifariam in E; Deindè ad internallum ED circuli arcus scribatur, qui poterit occurrere

ipſi B C tribus modis, vel eam non attingere; Hæc tamen varietas contrahitur ad binos caſus.

Quorum primus ſit, cum arcus ex E D ſemidiametro tranſierit accuratè per punctum B, aut citrà vbicumque ad partes H, vt in prima, & ſecunda figuris; Secundus verò caſus, cum idem arcus ſecabit BC ad partes vltra B, vt in K, aut ob nimis contractam ſemidiametrum E D nullo modo attingerit, vt in figuris tertia, & quarta. Pro caſu igitur primo ſumatur intercapedo F B, ſeù reſpectiuè F H, quæ referatur in D G lineam, deindè à puncto G erigatur inter parallelas normalis G C, poſtea iuncta D C. Dico eius partẽ L C comprehenſam ipſis inclinatis A B, B C, eſſe æqualem A F, ſeu Z. Pro ſecundo autem caſu, linea iungatur F H, à cuius quadrato auferatur ſpatium ſub A B H factum (& ſemper licebit, minus à maiore detrahere) poſtea linea, quæ reſiduum poſſit, etiam referatur in D G, & erecta vt priùs perpendi-

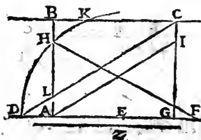


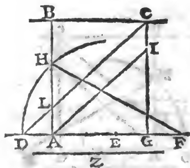


pendicularis G C ; illud idem præstabit C punctum idoneum ad quæsitum, quare vna vtriusq; casus fiet demonstratio. Etenim ex constructione fit euidens, quod in priore casu quadratum D G (seu F B, & F H respectiuè) superat quadratum A F præfinitæ A F per quadratum distantiæ A B parellelarum, In secundo deinde casu D G est differentia F H supra rectangulum A B H, si verò vtrobique apponatur quadratum, eiusdẽ distantiæ G C, erit ipsa D C potens quadratum A F plus duo quadrata A B (siue in secundo casu potens D G, & G C), quocircà datis tribus rectis lineis D C, A F, G C, licebit quartam proportionalem reperire, & sit per 12 sexti G I; at quia per 22 sexti; ea est proportionalium ratio, quæ similium figurarum ab ijs descriptarum, ideò erit quadratum D C ad quadratum A F, ita quadratum G C ad G I, quadratum, & per 16, & 17. quinti permutando, & diuidendo erit D C Q — G C Q, ad G C Q, vt A F Q — G I Q, quod idem

A 2 *est*

est dicere DG Q, ad GC Q; vt AG Q ad GI Q, & per eandem 22. sexti, latera eorundem proportionalia; scilicet DG ad GC, vt AG ad GI, ergo per 2. & 4. sexti DC, AI parallelæ fiunt, & triangula DGC, AGI similia. Cumq; à quadrato AF sit detractum AG quadratum, residuum est quadratũ GI, & duo simul quadrata AG, GI possit ipsa linea AI, per 47 primi, erunt & duo latera AF, AI æqualia, at ostensa sunt DC, AI æquidistantes, & inter alias AB, GC, parallelas, ergo per 33. primi erit ALCI parallelogramum; scilicet latera LC, AI æqualia, fueratq; AI, æqualis AF, hoc est Z; ex æquo, & LC æqualis erit Z; & quia est pars DC. pertinet ad datum D punctum extra. Er-sub angulo recto factum erit i quod oportuit.



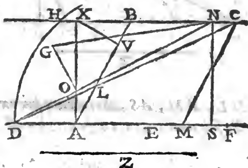


SCHO-

SCHOLIVM PRIMVM.

IN secunda deindè figura, linea FH, seu DG poterit quadratum distantiæ AB parallelarum, & preterea quadratum lineæ præfinitæ AF auctæ, scilicet magnitudine *BH*, quæ semper minor erit ipsa DA, & siquidem demitteretur ex H puncto æquidistans linea ipsi BL illa infra hanc occurreret DC, & triangulum constitueretur prorsus simile CBL, itaq; pro vtroque casu idem fit ratiocinium.

Secundo loco deindè sint A B, B C inclinatæ ad angulum maiorem recto A B C, & punctum extra datum D, à quo parallela similitèr agatur D A ipsi B C, in eaq; ponatur A F æqualis Z præfinitæ, deindè excitetur A X normalis inter æquidistãtes, & sub angulo recto AXC, ex primo casu ordinetur O N æqualis Z quæ pertineat ad D punctum datum

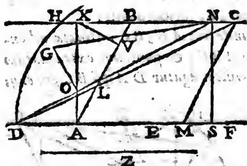


(supponimus nunc arcum ex E D semidiametro cadere citrà ipsum X), postea fiat X V super A B perpendicularis, & huic æqualis pariter ad angulos rectos eleuetur O G super D N, & iuncta G N alia æqualis fiat X C.

Dico

Dico iungendo D C, eius partem L C comprehensam datis A B, B C, esse æqualem ipsi A F, seù Z. Agatur C M parallela A B, & N S ex constructione fuerat ipsi A X. Erunt duo triangula D N S, DC M, quorum latera à parallela basibus, secta erunt proportionaliter, nempè hoc per A B, & illud per A X, vnde exsurgent duæ analogiæ, scilicet vna, vt

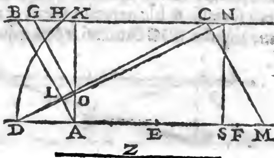
D O, ad D A, Ita O N, ad A S, & altera, vt D L, ad D A, Ita L C ad A M, & quia D O, & D L inæquales ad eandem D A relatæ sunt, erit eadem ratio O N ad A S, & L C ad A M, quæ D L, ad D O, quattuor igitur in analogia disponuntur quantitates ☲ D O,



D L, A M, A S, & factum sub extremis æquatur facto sub medijs, ex 16 sexti, hoc est D O in A S, æquale fit D L in A M, & vtrumq; eidem D A longitudini ad plicatum, latitudines oriundæ fient æquales, nempè ON æqualis L C, at constructa fuit O N æqualis A F, seù Z, ergo æquabitur eisdem ipsa L C, & cum pertineat ad punctum D datum extra, factum erit sub angulo maiore recto quod oportuit.

Tertio, & postremo loco sint inclinata A B, B C ad angu-

angulum recto minorem ABC, & reliqua vt in alijs dentur, ad Problema construendum. Agantur D A *æquidistans* B C, *& inter normales* A X, *postea sub angulo recto* A X N *aptetur O N, vt in primo casu æqualis* Z, *vt iam repetitum est plusquam, semel secabitur D N in O, ex quo puncto agatur O G æquidistans* A B, *deindè lineæ G N fiat æqualis* B C, *Dico pariter quod iungendo lineam D C, eius partem L C comprehensam inclinatis sub acuto angulo æquale esse præfinitæ* Z, *vt prius. Ducta namque C M parallela AB, vt erat N S ipsi A X, eorundem triangulorum D N S, D C M, vt in proximo casu latera secta erunt analogicè, hoc est erit, vt*



D O, ad D A, Ita O N ad A S, & adhuc

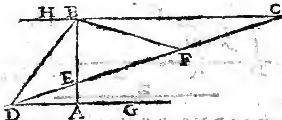
D L, ad D A, Ita L C ad A M, quo circa per eãdem ratiocinationem, conclusio deducetur eadem scilicet, quod O N fiet æqualis L C, & consequenter ipsi A *F, seù* Z, *ac proindè sub angulo acuto posita linea determinata, quę pertineat ad punctum datum extra. Ergo, & generaliter sub angulo quocumq; plano, inter inclinatas licet ponere præfinitam, quæ pertineat ad punctum extra datum. Quæ igitur Geometria per proprium potest genus,*

meritò

meritò iubet auxilia ignobilia, vt etiam insufficientia ab ipso amoueri opere, vnde & aßertum Philosophi comprobatur, rectum scilicet eße sui, & obliqui mensuram.

SCHOLIVM SECVNDVM.

EX hoc primo Problemate, optimè deducetur angulum quemcumque planum, per lineas simpliciter rectas facillimè trisecari, nec in suaue erit fortasse,& hic iteratam afferri praxim. Sit igitur angulus BDG datus nō rectus æqualiter trisecandus; Sumatur ad libitum in linea DB punctū, à quo in aliā DG demittatur BA perpendicularis.



Deindè à puncto D extra inter inclinatas AB, BC sub angulo recto ABC, ex casu primo præmissi problematis, ponatur linea præfinita, & sit illa DB dupla, nimirum ducta DC, eius pars EC æquetur duabus DB, & ipsa EC bisecetur in F, iungaturq; BF, ideoq; triangula BFC, BFE nec non BFD Isoscelia fiunt, ergo per 5.& 16. primi angulus BFD est anguli BCF duplus,& BFD, BDF æquantur, ergo BDC duplus est anguli BCD,& angulus DBH potest internos duos BDC, BCD, hoc est coalternus BDA

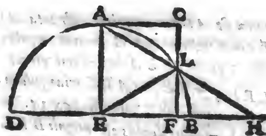
per

per 27 primi æquatur duobus simul BDC, CDA, seu DCB; ergo angulus ADC fit trięns dati BDA, & angulus acutus trisectus habetur per lineas simpliciter rectas: quòd si obtusus offeratur primum per bisectionem ad recto minorem reductus, & deinde per duplationem inuenti quæsitum assequatur, quod iterum per alias methodos Geometrica vbertas etiam perficiat, quæ non vni tantum medio adiici solet.

PROBLEMA SECVNDVM.

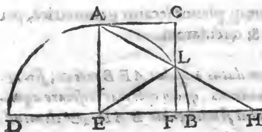
Angulus quicumq; planus secatur geometricè, per lineas rectam, & circularem.

SIT primum datus angulus AEB rectus, seu arcus AB quadrans, quem oporteat trisecare æqualiter. Compleatur semicirculus BAD, & eleuetur, EA normalis super BD diametrum, à pūcto deidè quadrantis A ponatur inter cōpositas AE, EB ad rectū



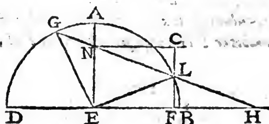
angulum linea AH diametro BD æqualis, & cadat in H, scilicet prorogatam DB, secabitur cum peripharia

circuli ad punctum L. Dico resectam portionem B L arcus trientem esse quadrātis A B, seu angulum B E L, anguli recti A E B. Demittatur L F ipsi A E parallela, & continuetur in C, sitque C L, æqualis F L, fiat etiam C A æquidistans B D, ostendetur coincidere puncto A ad peripheriam. Iungatur E L. Quoniam igitur duo sunt triangula H L F, A L C, quorum anguli ad L verticales æquantur, & recti sunt ad F, & C, ex ipso opere, habentque vnum latus adiacens vni adiacenti lateri F L, L C æquale, ergo per 26 primi, & 4 sexti triangula sunt prorsus æqualia, & similia, ideò H L, L A æquantur, nec non HF, CA, ergo in idem A punctum coeunt C A, A L, & parallelogrammum fit A F per 33 primi, & tota A H bisecta est in L, ideo isosceles E L H, in quo angulus exterior per 5. & 32 primi, E L A duplus erit vtrius vis angulorum L E H, L H E, at A L E triangulum est æquilaterū, cuius anguli omnes pares sunt, ex 15. quarti, ergo etiam A E L angulus duplus est anguli B E L (seu H E L) & componendo totus rectus A E B, triplus fit suæ partis B E L, siue arcus quadrantis A B triplus B L. Verum poterat casus iste omitti, quia vulgarem habet praxim



xim, & hæret propositioni quarti citatæ, at quia sub hac etiam forma reducemus reliquos casus, non debuit excusari, quod erit in cæteris compendium, & directorium.

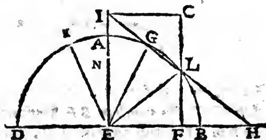
Secundus casus, sit cum detur angulus recto minor D E G, seu arcus D G quadrante minor. Completo similiter semicirculo, & ducta E A ad angulos rectos in B D; deinde ex G puncto extra agatur G H, in diametrum eductam, adeo quod eius pars inter AE, E H fiat æqualis diametro B D per primum problema, & sit N H, quæ secabitur cum peripheria in L. Dico



fieri bifariam, & resectam B L portionem arcus, trientem dati D G, seu angulum B E L anguli D E G. Cadat ex L in B D perpendicularis L F, quæ vt supra duplicetur in C, vt sint F L, L C æquales, & repetita ratiocinatione primi casus, eodem modo concludentur æquales E L, L H, & consequenter angulum esse B E L subtriplum anguli D E G siue B L arcum, dati D G trientem.

B 2 Tertius

Tertius demum casus erit, cum angulus detur recto maior D E G. Similiter inter inclinatas A E, E B ex puncto G inueniatur punctum vt N, adeò vt comprehensa sub angulo recto N E B sit æqualis diametro B D: deindè porrigatur E A in I, ita quod æquales sint N A, A I: postea ex I puncto per G continuetur linea vsque dum occurrat diametro educta, vt in H. Dico I H æqualem esse diametro B D, & resectam B L portionem tenentem dati arcus D G. Cũ itaque I G consistat citra tangentem circulum ex I puncto, secans, etiam in alio puncto, vt L secabit, ducta vt prius F L in C, vt æquales sint L F, L C; ergo ex ipsa constructione, vt in primo casu, triangula H F L, I C L æqualia sunt, & ob rectangulum, C E æquales sunt C I, & F E, hoc est F E æquabitur F H: ergo per 4 primi L F H, L F E



triangula æqualia, & similia, scilicet semidiametro E L æquatur L H, & tota I H erit dupla ipsius E L, hoc est D B diametro æqualis, etenim ostensa sunt I L, L H, æquales: ergo isosceles fit triangulum E L I, ita E L H,

nec

nec non G E L ; per 5 igitur, & 32 primi angulus E L G , seu E G L duplus erit vtriusuis angulorum ad E , & H interiores æquales in triangulo E L H ; at in triangulo E G I , ipse E G L exterior æquat duos G I E (seu L I E) & I E G. Ponatur I E G æqualis I E K , erit angulus L I E , seu L E I , vna cum angulo I E K angulus L E K , æqualis angulo L G E , hoc est G L E ; ergo L E K duplus fiet anguli L H E , siue ob æqualitatem anguli L E H , (dicas L E B) quare componendo angulus B E K erit triplus anguli B E L ; verum ob æquales A K , A G arcus abs quadrantibus sublatis , sunt B G , D K æquales : idcirco angulus B E K est ipse arcus D K G , siue angulus D E G , & cum B K triplus sit suæ partis B L , sectus erit datus D G tripartitò , & æqualiter, cuius triens sit B L , & angulus D E G , ter diuisus per angulum B E L . Quicumque igitur rectilineum angulum Geometria trisecare nouit per Euclidis præcepta ; factum ergo erit quod imperatum fuit.

MONITVM.

CVm exponeretur angulus Quadrantis cum semisse, complementum eius ad duos rectos, seu semicirculum, sua natura fieret triens dati, & in quolibet casu diuisa base trianguli æquilateri A E L bifariam, & in primo, parallela D B

exhibet L punctum in peripheria. In secundo si bisecetur N E, & in tertio ipsa I E assequetur idem L punctum. Cæterum dependenter à casu primo, punctum N potest excusari, & componere præcisè magnitudinis lineam, quæ posita à puncto G ipsa sit G H, cuius pars N H æquetur vt prius ipsi diametro, vel etiam ex H per L, ipsa H I sit ęqualis eidem B D, & hęc quidem effectio simplicior, & naturæ conformior reseruetur in alio opusculo, ad ampliorem scilicet Geometriæ amplitudinem.

SCHOLIVM.

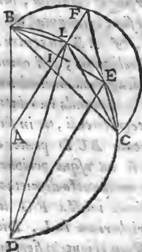
POsset fortasse alicui minus exercitato dubium videri in demonstratione pręmissa, an erecta C N (vt in secundo casu) perpendicularis conueniat ad N punctum, quo se secant H N diametro B D æqualis, cum A E, & in alijs casibus, in A, vel I, vt igitur omnem scrupulum tollamus. Cogitetur circa diametrum HN ex L circulus descriptus, & transire per E, docuit 31 tertii, ergo dupla N C, & E H cordæ in circulo æquidistantes à centro per ęquales L F, L C factas, & ad angulos rectos per 3. & 14 tertij, erunt N C, F E æquales, & ideò per 4 primi, & L N, L E æquales, ergo vt L E, F E in perpendiculari A E linea conueniunt, etiam L N, C N, in eadem coincidere necesse habet, & ob angulos rectos ad E, F, & C, parallelogram-

logrammum fiet rectangulum CE in omni casu problematis, & in primo CA tanget circulum ex corall. 16. tertij, & constat igitur propositum. Deindè in tertio casu punctum N ponetur, vt in secundo, si inter AE, & ED ad rectos compositas ex primo huius, ex puncto G extra dato, aptetur æqualis diametro BD, nec vlla diuersitas accidit in trisectione obtusi, vel acuti anguli.

PROBLEMA TERTIVM.

Angulus planus trisecatur cum sit sua natura circularis per simplices arcus.

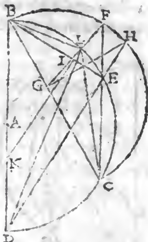
SIT semicirculus, siue summa duorum rectorum angulorum, in quo detur angulus, seu peripheria circuli competens trisecanda, & ponamus. Primum arcus datus sit quadrans BC, siue semicirculi semissis, seu BAC angulus rectus (cogitetur AC ducta) iste casus vulgaris est, & simplici transpositione circini sub amplitudine semidiametri BA, seu BE in CL perficitur, & propter alios casus præstat suam constructionem non



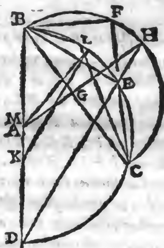
non dissimulare. Circa igitur cordam B C semicirculus alter sit B F C, cuius peripheria terminabit lineam C F ductã ad F, ex quo puncto super latus hexagoni per 15. quarti B E perpendicularis sit F L, quæ protracta cadere in centrum semicirculi primi ostendetur statim, & secabit B C nouo puncto in I. Dico B L esse trientem quadrantis B C. Agantur lineæ B L, C L, D E, & D L (quæ in sequentibus etiam figuris communes erunt, nec repetentur) quòd autem F I in A pertingat centrum, per 2. sexti B E D, B I A similia sunt triangula, & B E secta est in I bifariam; ergo, & A B in centro A; quòd vero demonstrationis est reliquum, post omnium casuum constructionem sub vnica forma concludetur.

Secundo loco datus angulus, siue arcus sit triens integri circuli, vt in secunda figura B C, & in semicirculo B C D prater delineata superius: continuetur D E ad vsque peripheriam secundi semicirculi in H, ex quo puncto demittatur H G perpendicularis in B C: deinde iuncta F G linea ex datis punctis, secabit peripheriam in L. Dico B L portionem ex B C resectam trientem fieri eiusdem. Agatur linea LK parallela

rallela D E, & hæc in sequentibus adhuc intelligetur ducta, & fiet communis, quod verò peculiare est in pręsenti casu est inter B D, & C F parallelismus, demonstratio deindè sequetur infra.



Tertio deindè loco arcus datus cedat trienti circuli; quadranti verò præstet, hoc est arcus expletionis ad semicirculum D C superet sextantem B E, tunc vt in secundo casu veniat super B C cordam arcus dati perpendicularis H G, ac prorogetur ad vsque diametrum B D, quam secet in M, deinde linea ex M in F punctis datis, secabit F M peripheriam B C nouo puncto in L. Dico & B L trientem fieri dati arcus B C.

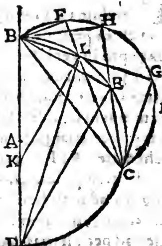


Quarto, & postremo loco arcus B C sit triente circuli maior, hoc est

expletio ad ſemicirculum DC, cedat BE ſextanti, tunc ſecta corda BC in G bifariam, hoc eſt centrum ſecundi ſemicirculi, & iungatur linea GH, cui ex F dato ordinetur parallela FM, quæ iterum ſecabit arcum BC datum nouo puncto in L. Dico, vt in omnibus aliis BL reſectam eſſe trientem portionem ipſius BC. Vt igitur perſpicua magis ſuccedat demonſtratio, ex conſtructionibus præmiſſis, quinis caſus accipiatur, & in figura ponatur datus arcus ſectus BC cum punctis E, L datis, hoc ex conſtructione, illud verò ex hypoteſi quod BE triens ſit ſemicirculi BED, & dico ita ſe habere BD, ad BE, vt BC ad BL, vt tria ad vnum. Agantur in quinta figura BLG, CLF; BEI, CEH, & iunctis BF, BH, CG, CI, conſtituta erunt triangula BFL, BHE, CGL, GIE æquiangula, quod deducitur facile ex 15 primi, 21, & 31 tertij, vnde, & ſimilia ſunt, & homologa ſubtenſa ſimilibus arcubus, ideò erit BF ad BL, ità CG ad CL, ſimiles, & abs ſemicirculis deducti, eorum expletiones erunt, & ſimiles nempè FG, & DC, quod etiam ex triangulis ipſis ſit euidens. Deinde quia æquales

ſunt

sunt arcus F H , G I ob angulos oppositos F C H , G B I per 21 tertij , apponatur communis G H : erunt F G , H I æquales ; postea à similibus C G , C L deducti similes G I , L E , erunt reliqui C I , C E similes etiam , vt ex triangulis ostendi posset . Igitur si rursus C I , C E similibus arcubus , similes accedant D C , H I , erunt compositi arcus D C E , & C I H similes erunt , hoc est D E & C H , sic adhuc similibus similes copulando B F ✠ F H , & B L ✠ L E hoc est B H , & B E similes sunt , & euidens fit eadem similitudo D E , C H , cum B E , B H , quia sunt inuicem expletiones ad semicirculos : ergo permutando ex 16 quinti eadem similitudo erit C H ad B H , quæ D E ad B E , & per conuersionem , similium ad similes , ita C H ad C G , quæ B H ad B F , sed fuerat vna , & eadem similitudo C G ad C L , quæ B F ad B L : igitur ex æquali per 22 quinti , vna erit similitudo rationis C H ad C L , quæ B H ad B L , & per 16 quinti permutando eadem C H ad H B , quæ C L ad B L ; sed fuit D E ad E B , vt C H ad H B : ergo per 11 quinti erit C L ad B L , quæ D E



 ad E B

ad EB, & componendo etiam fiet CB ad BL, quæ semicirculi BD ad BE, & fuit tripla, ergo arcus BC triplus suæ partis BL, qui relati ad angulos angulus BAL triens dati BAC, quod erat faciendum.

SCHOLIVM PRIMVM.

FOrma, qua vsi sumus argumentandi à similitudine arcuum ad cordarum similitudinem, non est ex peritioribus, qui improbare cogitauerint: pro ijs verò qui minus versati fuissent, discant vel á propositione 3. octaui libri Geometriæ practicæ Clauij, quod legitima est, & probata forma, cæterum in qualibet figura præmissi problematis, similitudo triangulorum BED, KIB (in primo schemate AIB) procedit in analogiam; nam BIK triangulum, non attingit cum recto BIK angulo ad peripheriam, neque angulus est BKI in centro, vndè non veras magnitudines effert, & ideo ad peripherias deducti latus KI fit KL, & conseruat æqualitatem in LC, & BK transit in BC, vt pro BIK triangulo rectangulo, acquiratur scalenum obtusangulum BLC.

SCHOLIVM SECVNDVM.

SI daretur arcus, seu angulus adcò paruus, vt difficilior experiretur effectio trisecandi, adest

paratum

paratum, facileq; remedium, scilicet, vt pro paruo accipiatur ad trisecandum complementum eius ad semicirculum, hoc est in quarto casu pro D C sumatur B C, vt iam trisecandũ, iuxta formam exhibitam, & sit B L triens: & quia per 19 quinti est totus B E D arcus ad sui partem B E, ita totus arcus B C, ad sui partem B L, permutatim dicetur vt B D ad B C totus ad totum, ita ablatus B E ad ablatum B L, erit & reliquus D C ad reliquum L E; ergo iste L E triens est dati D C. Id circo effectio trisecandi angulum planum, per geometriæ principia exercetur pluribus medijs, ita quod ineptum sit asserere problema non fuisse Geometricum, & de genere planorum, immò pro inueniendo L puncto in quolibet casu sunt adhuc non iniucunda compendia, at quam selegimus forma vsa fuit communior.

PROBLEMA QVARTVM.

Inter datas extremas duas inuenire lineas medias continuè proportionales.

AD *hoc problema construendum, ex Platonis monito abductum fuerat illud Deliacum nuncupatum, scilicet de duplicanda ara, forma figuræ seruata, quæ cubica fuerat; nam ex huius inuentione, illud statim iri perfectum, ex præceptis Geometriæ neminem*

latet



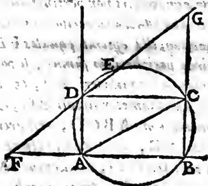
latet, qui aliquatenus de facultate eiusdem degustarit: at quantum laboris, ac industrię sapientiores illi, vt inuenirent apposuerint, videre est non tantum apud Geometras, verum etiam penes claros philosophos, historicos, Poetas, & tantum processerat in hoc eruendo difficultas, quod quasi consensu indicto, sibi suaderent, rem inter impossibilia facultati redactam fuisse, quia post praclarissimos Authores per varia, & continuata sęcula, nihil amplius seu perfectius eductum fuit in lucem; verum enim vero insolens admodum foret, si quis in disciplinis vellet illud ponere, Non plus vltra: rumor igitur quidam iam delatus spem insinuauerat, ex Iberia methodus proditura, qua nodus tandem ille Gordius solueretur, non ense Alexandrino, sed Megarensę filo: at vt videre licuit spes illa euanuit, quum prater repetitionem antiquarum, ac accessionem vnius, vel alterius ex neotetricis, attulit nihil quod conduceret, immò improperia fuere Geometrię cumulata, confirmando nempè ea, quæ semper facultas improbauerat, quasi defectus in ipsam omnes reicientes, & quod nequeat præstare tàm sibi necessaria, ego quippe nunquàm potui aliorum placitis acquiescere, nec despicere valui, quò impotentia ista latitaret, & videbatur mihi portentum, tot ingenia praclara, & quę tàm diuitem fortasse vbertatem antiquorum, thesaurum reddiderunt mathematicum, huc aliquando pro indigentia Geometriæ non adplicassent, nam facillimè detexissent, quę fuisset in hac arena natura semita, scilicet non vna vniuersali ratio-

ne

ne licuisset casus comprehendere; & sub vna quidem demonstrandi forma, complecti postea, quæ in constructione aliquam requisierant veritatem, quod quidem in premissis à nobis obseruatum, & in constitutione abducti problematis huius prosequamur, sic quilibet nos ante laborem hunc sibi poterat suscipere; si ad ingressum oculos posuisset, at quia haud ingratum fore speramus, (presertim ingenuis, hoc est qui sine liuore alienas excipiunt curas) si nostri progressus rationem exponemus.

Vt igitur perspicuè magis succedat, accipiamus aliquem modum ex illis veterum, & sit illum Philonis Bizantij, siue Apollonij Pergei, relatum à Philopono in commentarijs ad lib. primum posteriorum Aristotelis, qui sic habet.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inequales A B, B C, *& ponātur ita vt rectum angulum contineant, eum qui sub* A B C, *& compleatur parallelogrāmum* B D. *& diameter ipsius ducatur* A C, *& circà triangulum* A C D *desscribatur circulus* A B C D, *& producantur lineæ* B A, *&* B C *in rectā vsq; ad* F, *&* G, *& coniugatur* F



G tran-

G, transiens per D punctum, ita vt F D æqualis sit lineę E G, hoc enim tanquam petitio sumitur indemonstratum, huc vsque Philoponi verba, ex quibus constat problema inexpletum: at in hoc perficiendum omnes variè labores insumpserunt, & inutiliter hactenus, Nos verò hac ratione cepimus philosophari pro hoc argumento, etenim si in circulo esset quadratum, & latera A B, B C producerentur, & super diametrum B D insisteret linea ad angulos rectos, vtique ex vi triangulorum portiones eius F D, D G ęquales essent: at ratio æqualitatis non pertinet ad quæsitum, oportet, quod per duo puncta in peripheria D, & E linea transeat, iungendoq; illa efficiat ęquales F D, E G. Secundò quia circa peripheriam sumus, si ponamus in circulo latus trianguli æquilateri A B, & altera linea detur, quæ sit semidiameter circuli B C, & perficiatur parallelogrammum A B C D, erit arcus A B duplus ad arcum B C, at corda in ratione tripla quadratorum ex 12 decimi tertij, diuidentur A B, C D bifariam in I, & O punctis, & ex angulis A, & C agantur A E, & C H, quæ parallelę erunt, & ęquales, itaque ducendo

cendo per E, & C lineam rectam, occurret in productas AB, & AD, vt in F, & G puncta. Dico portiones EF, & CG fieri æquales, quod geometricè infra cum vlterioribus casibus, sub vna forma ostendemus. Non itaque erat in loco tam obscuro, quod leui intentione non obuium se proderet, & ex hoc ad reliquos progredi liceret.

Si igitur ratio fiat dupla extremarum AB, BC, componantur ad rectū, & compleatur parallelogrammum, cui circa per 5. quarti circulus eat; & AB, & AD latera prorogentur indefinitè; deinde AB bisecetur in L, ex quo puncto ponatur indirectum LG æqualis diametro AC postea tota AG, iterum bifariam secetur in N, ex quo puncto vt centrum, ad interuallum dimidiæ AG secetur peripheria in E, quod necessario erit supra BC, itaque

si continuetur linea per C, & E. occurret productis illis A B, A D ad puncta F, & G. Dico partes comprahensæ C G, F E æquales fieri, quod simul infra demonstrabimus. Interim illud punctum E aßequi poterit in hoc casu, si distantia D L ponatur in D E, quod autem linea C E sit necesse occurrere ipsis A D, A B; quia efficitur trianguli rectanguli opposita euidens fit.

Deinde si ratio A B ad B C detur maior quam dupla, ordinetur eadem constructio quà supra, quo ad vsque A B secta sit in L bifariam, deinde quadratum differentiæ quadratorum B L, B C (minor ex hypotesi hæc est, & illa maior linea) auferatur à quadrato diametri A C, & linea reliquum potens continuetur ex L puncto in L G,

postea

postea tota A G secetur nouo puncto N bifariam, & ibidem centro ad interuallum semissis A G, signabitur pariter circulo punctum E, per quod linea C E ducta, Dico vt supra æquales relinquere interceptas F E, C G, vt infra confirmabitur.

Demum data ratio A B, B C minor sit quam dupla, replicetur eadem constructio, quæ vsque A B secta fuit in L bifariam, postea cum B C maior sit quam B L, eorum differentia quadratorum, accrescat quadrato diametri A C; linea verò quæ vtrumque possit, ponatur ex L in G, deinde tota A G secta bifariam in N, & ibidem centro, & distantia semissis A G, signabit in peripheria punctum E, & per duo puncta E C, vt in reliquis, conducta linea: efficietur quæsitum, nempè æquales erunt F E, G C, at post constructiones, vt vides parumper differentes, vna demonstratione Eucldeisq. præceptis omnes perstringentur casus, at indstriæ Lectoris relinquimus, duobus istis postremis limitare distantiam, ex D in L, vt pariter ex D in E idem punctum assequatur, quod intendens ad constructionem non erit obscurum.

Assumatur rursus aliqua ex premissis figura, cum suo puncto E inuento ex constructione, in qua demonstrationis, ergo linea E A iungatur, cui parallela ordinetur C H, & erunt secta in parallelogramo rectangulo latera A B, & C D punctis I, & O, & iungatur A H, erit aliud rectangulum in circulo A E C H. Et quia anguli O C E, O A D eidem peripheria D E insistunt equales sunt per 21 tertij, & recti sunt qui ad D, quia in semicirculo ex 31 eiusdem, ac reliqui etiam ad O verticales, quare aequiangula sunt triangula O E C, O D A, & per 4. sexti homologè sumpta latera proportionalia habent. Et quia intra idem A B C D parallelogrammum est Rhomboides A I C O, & duo latera A I, C O aequalia detracta ex aequalibus A B, & C D relinquunt aequalia B I, D O: ergo triangula B I C, D A O sunt aequalium laterum prorsus, & similia, & eodem modo similia, & aequalia sunt A H I, C E O triangula: praeterea similia adhuc sunt triangula A D O, A E F, ob communem angulum ad A, & rectos A D O, A E F, ac reliqui ex 32 primi A F E, A O D aequales sunt; ergo per 4 sexti erit A E ad E F, vt A D ad D O, & per 16 eiusdem, factum sub extremis A E, & D O aequale erit facto sub medijs A D, & E F. Deindè cum sint in ordine vno tres lineae A E, D A, D O, tribus alijs in ordine alio equales ex serie lineae H C, B C, B I, si igitur reperiatur quarta in analogia ex 12 sexti, necessario, &

aqua-

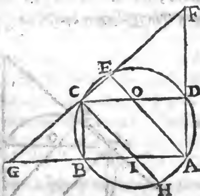
æquales inter se erunt dicatur: itaq; conuerso modo D O prima, ad D A secundam, ita A E tertia, ad E F quartam, vt ipsa similium triangulorum latera exigit, ergo vt B I ad B C, ita H C ad C G quartam euidens est quod æquales sunt E F, & C G, quod etiam per 14, & 16 sexti concludi poterat. Igitur sunt inuentæ duæ portiones C G, E F eiusdē lineæ ductæ ex C

dato puncto (in prima vero figura Philonis fuerat D) intercepta nimirum à peripheria circuli, & latera inscripti rectanguli producta, quare quod apud illos veteres Philosophos fuerat petitio, & indemonstratum in eorum constructione, modo factum est opus Geometricum, & Euclideum. Reliquum nunc est quod demonstratio illorum, quę optimè se habet transcribamus, ne aliundè studiosi cogantur inquirere.

Quoniam igitur sunt æquales F E, C G communi addita C E, & compositę sunt æquales C F, E G, & quia à puncto F extra circulum sumpto, duæ incidunt illum secantes F C, F A per 36 tertij, rectangula C F E, A F D æqualia sunt; at C F E æquatur E G C rectangulo, vtraque enim vtrisq; sunt

æqua-

æquales, nempè E F ipsi CG, & C F, ipsi E G: ergo rectangulum A F D æquale rectangulo sit EGC, at per eandem 36. tertij E G C æquale est rectâgulo A G B: quia similiter ex G puncto extra incirculû cadunt G E, & G A, illum secantes; Ideò A F D rectangulum, æquale rectangulo est A G B, & æqualitas in proportionem resoluta, erit A G ad A F, ita F D, ad B G, sed vt A G, ad A F, ita B G ad B C per 4. sexti propter similia triangula A F G, B C G: est autem D C æqualis A B, & A D æqualis B C: Igitur erit A B ad F D, ita B G, ad B C, Erat autem vt A G, ad A F, ita F D, ad B G: ergo vt A B, ad F D, sic ipsa F D ad B G, & ipsa B G ad B C. Igitur continuè quatuor sunt proportionales A B, F D, B G, B C, & duæ mediæ inuentæ sunt inter extremas, & quidem Geometricè, ita quod securè, & per facultatis præcepta redire licet ad problema principale de sectione solidi vel cubi, augendo, vel minuendo; & pariter ex hoc etiam methodo constat rationem quamcumq; datam tripartito secare, quod hactenus à nemine factum nobis occurrerat:



PRO-

PROBLEMA QVINTVM

Aliter in data ratione, Cubum seu solidum secare in simile.

Pappus in suis collectionibus mathematicis authorum aliquot modos retulit, à quibus problema hoc tentatum fuit ad soluendum, & suum his exposuit, prius ad 5. propositionem tertij, deindè ad 12. octaui, vbi sequentia habet.

" *Organicæ multæ sunt species, & partes; alia enim*
" *à mechanica, & Gnomonica, & ea tractatione,*
" *quæ circa aquas versatur ratione considerata, per*
" *instrumenta ab ipsa confecta demonstrantur; multa*
" *verò, & seorsim, à mechanicis extrinsecus ab ea*
" *perficiuntur, & non nulla quæ Geometricis ratio-*
" *nibus non facilè tractantur, assumens instrumentis*
" *ad faciliorem constructionem perduxit. Statim igi-*
" *tur problema, quod Deliacum appellatur, cum*
" *natura sit solidum fieri non potest, vt Geometricis*
" *rationibus innixi construamus. Quoniam neque*
" *coni sectiones facilè est in plano describere, instru-*
" *mentis autem mutatum in manuum operationem,*
" *& constructionem magis idoneam ea, quæ ab alijs*
" *exposita est sic reducetur propositum. Dico autem*
" *cubum, cubi duplum inuenire, non solū autem duplus*
" *inuenitur per subiectum instrumentū, sed etiam ge-*
" *neraliter proportionem habens quamcumq; datam.*

Descri-

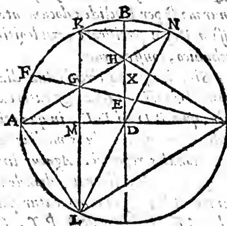
Describatur igitur semicirculus A B C, & à centro D ad rectos angulos ducatur D B, & moueatur regula quædam circa A punctum, ita vt vnus terminus clauulo quopiam aptetur A, reliqua verò pars circa centrum inter B C moueatur.

His ita constitutis propositum sit duos cubos inuenire, qui inter se datam rationem habeant. Fiat proportio B D ad D E eadem, quæ data est, & iuncta C E producatur ad F: moueatur autem regula inter B C, donec pars eius intercepta lineis F E, E B, æqualis sit ei, quæ inter B E, & circumferentiam B K C intericitur, hoc enim tentantes semper, & trãsferentes regulam facilè assequemur; factum iam sit, & regula positionem habeat A G H K, itaut G H, & H K sint inter se æquales. Dico cubum factum ex linea B D ad cubum ex linea D H datam habere proportionem, scilicet, quæ est B D ad D E.

Intelligatur enim circulus completus, iunctaque D K producatur ad L, & iungatur L G, ergo L G parallela erit ipsi B D, propterea quod H K æqualis est H G, & K D ipsi D L: iungantur etenim A L, L C, quoniam angulus G A L in semicirculo est rectus, & perpendicularis A M, est vt quadratum ex L M, ad quadratum ex M A, hoc est vt C M ad M A, ita quadratum ex A M ad quadratum ex M G; etenim vt L M ad M A, ita M A ad M G: ergo vt quadratum ex L M ad quadratum ex M A, ita quadratum; ex M A ad quadratum ex M G

etenim

& CM ad MA, communis apponatur proportio AM ad MG, ergo proportio composita ex proportione CM ad MA, & ex proportione MA ad MG, videlicet proportio CM ad MG, eadem est, quæ componitur ex proportione quadrati AM ad quadratum MG, & ex proportione AM ad MG. Sed proportio composita ex proportione quadrati AM ad quadratum MG, & ex proportione AM ad MG, eadem est, quam habet cubus, qui fit ex AM ad cubum qui fit ex MG; ergo CM ad MG proportio est eadem, quam cubus ex AM habet ad cubum ex MG: vt autem CM ad



MG, ita CD ad DE, hoc est BD ad DE; vt autem AM ad MG ita AD ad DH; ergo & BD ad DE, quæ est proportio data, ita cubus ex BD ad eum qui fit ex DH cubum. Hactenus verba sunt Pappi.

Ingenuitas plane ignorat, neque conducens est, in viros præclaros inuehere, at dissimulare progressus

 disci-

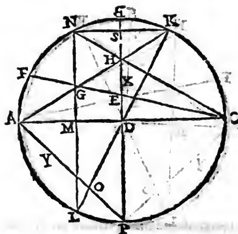
disciplinæ ; nec munus permittit , nam qualibet facultas sensim, & decursu temporis sua acquirit incrementa , Pappi sententia fuit , & communior antiquorum hoc problema esse sua natura solidum , & quod innitendo Geometricis rationibus construi nequeat , cui sententiæ adhæserunt hactenus Authores ; nos verò in contrarium sentiebamus , & quos experti sumus aduersarij nobis improbarunt illudendo ; ideò præter ea , quæ supra aduersus aliorum sensum attulimus , aggredimur modò per Euclidea documenta inuentionem præmissam Pappi purificare , vt legitimè scilicet remoto mechanico , construatur.

Sint itaque in circulo duæ diametri A C , B D ad angulos rectos ductæ , & ratio extremarum data , ea sit , quæ B D ad D E , in qua etiam fiat cubi exhibendi , igitur oportet duas medias inter illas continuè proportionales reperiri . Agatur linea C E F , quod huc vsque Author fecerat , deindè iuncta corda quadrantis A P , à qua remoueatur portio A T æqualis cordæ A F , reliqua verò P T , secetur bifariam in O , ex quo puncto per centrum D agatur linea , siue diameter altera L K . Dico hoc puncto K effici problema , nimirum ducta A K , qua secabitur B D in H , esse D H secundam maiori proximam in serie quatuor proportioralium , quod est quæsitum .

Post ductam L K , agatur L N æquidistans diametro B P , quæ erit ad rectos angulos super A C in M , iungantur N K , & C N , deindè ponatur L G ,

(vbi

(vbi scilicet CF, LN se secant) dupla DH in linea DB. Et quoniam est LK ad DK, vt LG ad DH, per ea, quæ Authores demonstrarunt, vt colligit ad 4 sexti in Scholio Clauius, linea iungens GK transit accuratè per H punctum, & demonstrabimus statim pertinere per constructionem præcisè ad A punctum. Et quia triangulum LGK habet latera LK, KG secta bifariam, hoc est GH, HK sunt æquales, etiam in GNK linea NK secatur bifariam in S, & ad rectos angulos per 3. tertij; ergo per 4 primi NH, & HK sunt æquales, & tres GH, NH, HK ad vnum punctum H, quod erit centrum circuli transeuntis per GNK: & quia tam angulus NHK, quàm huic verticalis AHC bifariam sectus erit per BD, & anguli ad D deinceps recti sunt; ergo



per 26 primi triangula D H A, D H C, *quæ habent præter adiacentes angulos æquales, commune latus* D H, *&* H A *æquabitur* H C, *at fuerant* H K, *&* H N *æquales, tota corda igitur* A K *æqualis est* C N, *sed* C F, L N *se secuerunt ad punctum* G *in quo cadit ipsa* A K, *quia* H N, *&* H G *sunt æquales: quare tota linea* A G H K *positionem eam habet, quam ex mobili instrumento Pappus in* A *fixo conce-*

perat, vt æquales efficeret G H, *&* H K, *quod tamen per puram, putamque Geometriam assequitur, vndè sequitur Problema esse natura sua planum, & compendiosè construi post ductam* L K, *iungendo* A K, *quæ secatur* B D *in* H, *&* D H *fit proxima maior in serie, & inter* D H, *&* D E *secundam, & quartam per 13 sexti, si reperiatur* D X *inter illas*

media

media, erit in serie tertia, & quatuor continuè proportionales BD, DH, DX, DE. Igitur cubus super BD ad cubum super DH, erit ratio, vt primæ BD ad quartam DE, minuendo: vel è contra cubus super DE ad eum, qui supra DX cubum, in ratione primæ DE ad quartam BD, augendo. Idem vero concluditur de solidis similibus super eas constructis, quia ex 11 definitione quinti, & 36 vndecimi iuxta Campanum in triplicata sunt ratione homologorum laterum: at reliquum demonstrationis in nostra constructione, nec hilum discedens ab ea, quam superiùs attulimus ex Pappo, repetere non est opus.

ADNOTATIO.

EVtocius in opera Archimedis celebris commentator, monumenta eorum, qui de hoc argumento egerunt collegerat, animaduertit trium Authorum, scilicet Heronis, Apollonii, & Philonis inuenta in vnam conuenisse methodum, nec non aliorum trium Dioclis, Spori, atque Pappi, etiam in vnam coincidisse, propter formam demonstrandi; reliquorum verò qui per Conica, vt Menechmus, ab antiquis non receptus in Geometricis, vel ipso Pappo attestante, deinde instrumenta inuecta à Platone, Archita, Eratosthene, & Nicomede, cum magis à Geometria aliena, & consequenter minus apta, à materia ipsa repelli,

nos

nos verò eam apposuimus curam, vt præcedentia per Geometriæ pręcepta expurgata recipiantur legitimè, non tamen nouum intendimus instruere litigium, quum minimè ignoremus, aliqui ex neotericis, non vtique de numero, ac peritissimi contendant doctrinam Conicorum posse inter plana recipi, at si ad eorum Genesim intendant, durum videtur huic sententiæ assentiri.

PROBLEMA SEXTVM.

Inter datas extremas duas inuenire medias continuè proportionales.

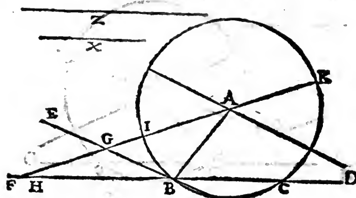
ITerum & tertio hoc idem ad construendum Problema aggredimur, & quidem per methodum Vietaam, hanc etenim vnicè reperimus nouam, neque famulari vetustiorum formis, & siquidem suum deponat inductum postulatum, nil minus alijs idoneam demonstrabimus. Author itaque ad V propositionem supplementi ita habet.

PROPOSITIO V. SVPPLEMENTI VIETÆ.

Datis duabus lineis rectis, inuenire inter easdem duas medias continuè proportionales.

Sint

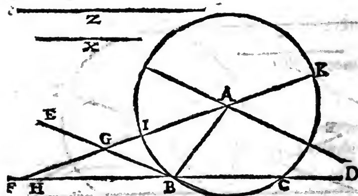
SInt datæ duæ lineæ rectæ Z, X, oportet inuenire inter Z, & X duas medias continuè proportionales. Sit Z maior, X minor. Centro A, interuallo A B æquali dimidiæ Z, describatur circulus, cui inscribatur B C ipsi X æqualis; producatur autem B C in D, facta B D dupla ipsius B C, & iungatur D A, cui agatur parallela B G indefinita, producatur etiam D B in-



definitè, & ab A puncto ducatur ad duas B G, B H, recta K A I G H secans ipsas quidem B G, B H, in punctis G, H, ita vt G H sit æqualis ipsi A B; circulum verò in punctis I, K, quorum proximius ipsi H sit I. Dico continuè proportionales esse I K, H B, H I, B C. Quoniam enim constructæ sunt parallelæ D A, B G, ideò est vt H G, ad H B, ita G A ad D B; est autem H G ad I K, sicut B C ad B D, vt simplum videlicet

ad

ad duplum. Quare est vt IK ad HB, ita GA ad BC: ipsi autem GA addatur GH, auferatur autem AI. Quoniam igitur GH, AI sunt æquales, erunt quoque *HI*, GA æquales; ergo est vt IK ad *HB*, ita HI ad BC; ab H igitur puncto extra circulum sumpto, eductæ sunt duæ rectæ ipsum secantes, & quod fit sub exterioribus

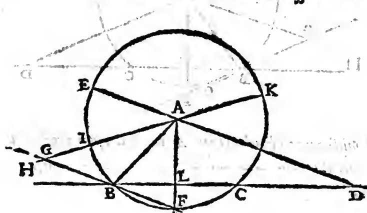


earundem partibus videlicet HB, HI æquale est ei, quod fit sub interioribus, videlicet IK, BC. Quare partes exteriores permutatim sumptæ sunt continuè proportionales, nempè IK, HB, HI, BC. Datis igitur duabus lineis rectis Z, X, id est IK, BC inuentæ sunt inter eas duæ mediæ continuè proportionales HB, HI, quod erat faciendum.

Igi-

IGitur pro constructione nostra, ex præmissa eam recipimus partem ad usque B G ductam æquidistantem D A, quia ritè se habet, ulterius verò inspiciendum est, ubi eadem B G secet circulum, quod ex data extremarū ratione diuersimodè se habere oportet.

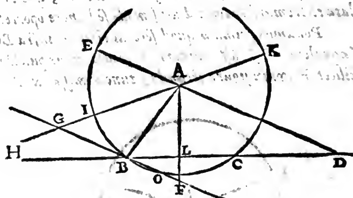
Ponamus primum quod secetur circulus infra BC (æqualem X) & quidem in medio arcus puncto, scilicet F, ut in figura secunda; tunc demissa ex A in



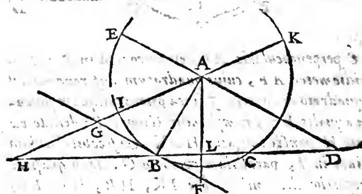
B C perpendicularis A L, & prorogata in F erit semidiameter A F, cuius quadratum auferendum est è quadrato diametri, & linea potens reliquum ponenda æqualis B H, nempè indirectum C B: deindè ex dato H puncto iungatur H A K, & secabit circulum etiam in I, parallelam verò in G. Dico quæsitas proportionales continuè esse I K, H B, H I, B C, quarum extremæ I K, B C sunt datæ Z, & X.

Deinde secet eadem B G parallela D A arcum

inter B F, vt in tertia figura B O, aut tantum attingat circulum in B puncto cadens tota extra (quod continget, quum ratio Z ad X fuerit dupla) etiam



demissa perpendicularis ex A in BC, & producta occurrat eidem BG ad F punctum, vt in figura

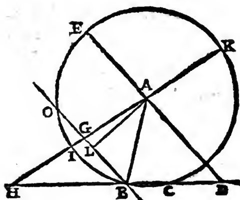


quarta, eodem modo quadratum AF sublatum, è qua-

quadrato diametri, linea pariter potens reliquum indirectum C B ponetur, & erit B H, & ex H per A, proportionales aßequentur eadem, quod ſtatim oſtendetur.

Si verò, B G eidem D A æquidiſtans ſecet circulum infra ipſum B C, at vltra ſemißem B F, hoc eſt corda fiat B O, tunc ſimiliter, & A L perpendicularis eam diuidat bifariam, & eius A L quadratum dematur à quadrato diametri, & linea reliquum potens, etiam indirectum C B poſita, vt B H, illud idem efficiet, vt in alijs.

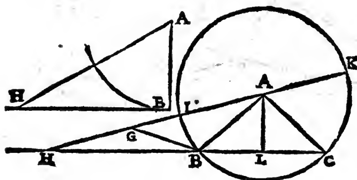
Demùm eadem parallela BG secet circulum supra ipsam BC minorem extremarum, & sit corda BO, quæ pariter secetur abs AL perpendiculari: tunc sumatur linea potens quadratum AL, & semidiametri quadratum, (& illa sit quæ duceretur ex L in E) quæ indirectum ponetur ipsi CB, veluti BH, & rursus iuncta HAK fient eadem proportionales IK, HB, HI, BC, & omnium harum effectionum ratio perspicuè explicabitur Lemmate sequenti.



LEMMA.

IN triangulo rectangulo ABH, sit latus AB reliqui BH in potentia subtriplum, hypotenusa AH dupla erit AB, quod vel initiato neminem latere supponimus; at rectus angulus augeatur magnitudine lateribus inuariata, & sit obtusangulum ABH in secunda figura: iam ex 12 secundi quadratum lateris AH maius est quadratis HB, BA rectangulo HBC (siue HBL bis

bis) quod equidem rectangulum erit quadratum lineæ inter HB, BC mediæ proportionalis, sitq; HI. Cum autem secunda HB posita sit in serie à prima IK, hoc est Z diametro circuli, tres erunt in serie IK, HB, IH, immò addita BC, quatuor inuentæ habentur ex datis extremis; excessus itaque quadrati A*H* supra *H*B, BA quadrata, erit æquale eidem rectangulo HBC, scilicet qua-



drato HI, aut AG, si agatur BG parallela ducendæ AD in duplam BC, videlicet BD, & totum hoc per omnes casus non fuit valdè obscurum ad determinandum ipsius HB secundæ: itaque videtur prorsus coincidere cum effectione Vietæa (amisso videlicet à geometrico) nam ex *H* puncto in circulum duæ sunt incidentes lineæ HBC, HI*K*, & quod ab interioribus fit rectangulum æquale est ei, quod ab exterioribus; ergo

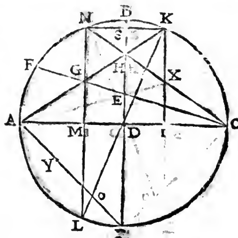
vicis-

vicissim in continua analogia habentur IK, HB, HI, BC; quare manifestum esse poterit, quam malè posteris consulerent, qui vlterius ad hæc inquirenda problemata laborandum frustra non esset inculcarunt; immò quæ nos minus perfectum exhibemus (etenim nihil inuentum, quod simul exhibeatur absolutum) locum erit alijs, vt nostro hoc modulo ornamenta proferant, vt pro Geometriæ culmine, dignum eleuari fastigium, quat.

Pro V. Problemate Demonstratio planior.

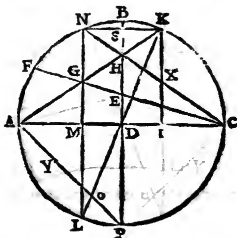
IN nostra geometrica constructione, post inuentum K punctum, agantur KI, KN æquidistantes, hæc AC; illa verò BD diametris, & iuncta NL erit MNKI quadrilaterum bisectum æqualiter per BD; ergo per primā 14 Euclidis, & eius corollariū cum Clauio, tùm arcus, tùm corda NK secan- *tur*

tur æqualiter, & NL, CF sese secabunt in G. Agatur NC, KA, quæ æquales cordæ erunt ob arcus æquales, se etiam secantes in H: tria igitur ostendere est necesse, & æquales fieri GH, HK; deinde tres lineæ AK, CF, NL in vno secari puncto G; postremò tres etiam AK, CN; BD in vno conuenire puncto H. Quoniam æquales sunt tàm arcus AN, CK, quàm anguli AKN, CNK, & recti sunt GNK, XKN, & reliqui NGK, NXK erunt æquales ex 32 primi: at per 26 triangula duos angulos, & vnum commune latus habentia NGK, KXN æqualia, iterum per 4 sexti similia euadunt, & GK, NX æquales erunt; sed in duobus NHS, KHS triangulis per 4 primi æquales sunt NH, HK, quare, & inter se, & GH, HX æquales; at propter coalternos angulos NXK, XNG, nec non NGK, GKX æquales, isoscelia fiunt NHG, KHX, quare omnes GH, HK, NH, HX sunt æquales inter se, &



ter-

constat primum GH; HK esse æquales inter se, & tertium sit euidens, quum H punctum, vt centrum commune sit tribus GK, NX, BD, aliàs non essent latera, & triangula æqualia, secundum vero quod AK secet NL in puncto G, quo se secuerant CF; NL, quia similia sunt AIK, ADH, AMG triangula, & iterum similia AMG, KNG, aliàs constans similitudo destrueretur: præterea AG diameter sit in quadrilatero AFGM, quod est in circulo ob rectos ad M, & F (si intelligatur ducta AF) ergo tres côueniunt AK, NL, CF, ad reliquum demonstrationis nihil opus est apponere, cum optimè theorema Authoris processisset; ergo totum illud quod proposuerat Euclides in libris V solidorum, si duo adscripti Hysicli recipiantur, exerceri debent, & possunt per doctrinam planorum, quia ex planis constituuntur, & contra rei naturam est sustinere aliena, illegitima, & inaccurata.



FINIS.

FRANCISCO STELLVTO
ACADEMICO LYNCÆO.

S. P.



ON equidem inopinatum V. Cl. aut ambiguum apud me fuit, minimè defuturum, quod nostrum ab aliquo, pro Geometria assertum oppugnaretur, etenim in compertum mihi fuerat, incommoda haud paucis, ac molestias foret allaturum, quum habeantur plures assueti à geometrica adeò fouere, ac patrocinari, qui eadem inter germana facultatis etiam velint familiæ cooptari, & hoc sanè non minus doctrinæ veterum, quam rei naturæ, quod difficile est tolerare, aduersetur. Et siquidem disceptatio à quopiam instituta modum, seu decentiam recepisset (ex quo hisce incitamentis magnum accedere disciplinis incrementum, haud sit inexploratum) sua vtique laude non debuisset fraudari author; at vbi moderaminis, ac ciuilitatis oblitus (propter vsum an in naturam transierint) mores, sanè assumpsit plagios, vndè sibi vsurpati muneris ignorasse fines ostendit, proindè honorifico censoris ammisso, contumeliosi odibile nomen comparauit, & quis ille fuerit, vt liberrimè li-

ceret; quasi ageret sub persona indicia minime sustulit; at ingenio tantùm valere haud potuit, quantum in animo fuisset pessum dare nostra; verùm eo minus videretur ad intentum collimasse, quo aduersum nos impetu ampliore duceretur: quo circa facta argumenti abductione, & conati ex nostra imbecillitate velle abstrahi, è viribus facultatis ea, quæ sibi competunt à natura, vt propria, nimis planè fuit in aperto aberrare lumine: à diuersis namque non tenet illatio. Itaq; nos approbatum admisimus consultum; aliud scilicet reciprocandum non esse, ex inurbano illius themate responsum, quám mentem ab eo auertere, & quantum decet inofficiosè adeò prolata negligere, ac obliuisci. Etenim quæstiones aculeatis coalescere verbis, at operis effectione facile dirimi, exemplis bene multis experientia nos instruit. Neque ego sum meæ exiguitatis adeò ignarus, quò minus inter generosum, ac animalium pigerrimum discrimen virium animaduertam: Pumilio etenim in monte consistens, quis ignorat, vnquam fieri magnus? at procul dispicere potuisse, quam eiusmodi ascensum, qui neglexissent, nemo vtique sanus inficiari auserit. Liberum planè cuicumque fuerat hoc in stadio descensum, & se probare, & nihil modo inhibet (quod maximè optamus in obsequium geometriæ ab aliquo fieri) potiora exhiberi, ijs nimirum

quæ

quæ sub obscurè primum; deinde non nihil possibilitatis lumine aucta; quæcumq; vero educta modo sint suæ formæ congrua, aliorum esto iudicandi munus, & si quidem minime improbari à te sensero, à me tuum pro multis putabitur; nã quantum in hisce studijs profecisses, nec si vellem ignorare debui; at vno perstringam verbo, nullũ equidem in facultate vitiũ fuerat, nec aliud quod obstasset, quò minus duo illa problemata controuersa, per simplicia elementa directè perficerentur; sed in culturam omnem latitasse culpam, nucleus, & cardo fuit nostræ disceptationis. Si verò aduersariorum arma ex pluteis eorum sumpserimus, hoc est eorum inuenta proferantur à geometrico, quo laborassent, repurgata, non ne erit suppressis scilicet amaris inutilibusq; verbis, opere, & effectione abundè respondisse? aut oportunè (ignosce quæso) quasi Alexandrino ense nodum soluisse?

Ceterum quia nobis cunctantibus accepimus à non nullis modestissimè succenseri, quos inter, nec rarò te videram, conquerentibus scilicet, cur pro re tàm mole parua tantum temporis admiserim, & quia aliquos percepissent nobis insultare? at quia inter humanos actus, contingere illud experimur, quod in rebus constanter à natura directis, videlicet, vt cuncta maturè erumpant, magnum in tempore inesse momentum, & illi viden-

tur prudenter agere, quorum consilia à temporis potestate oppugnari minime concedant. Non nulli deindè sunt, qui profiteantur nunquam aliena, nisi ad vellicandum inspicere, at quo modo postea exerceatur, cum arbitrarium fiat, necesse est omnium sustinere mixturam, interim vt curiositati aliorum, & tibi faciam satis, si ex rationibus, quæ in decursu contigerant vnam exposuero, fortasse dabitur intelligi, minus fuisse integrum aliter deliberare, sua videlicet non expectata oportunitate.

Scias igitur me aliquando incidisse in quod-*Vossius* dam volumen post humum authoris in humanioribus literis præclari nominis, & vbi de mathematicis ageret disciplinis, reperi, ex Belgicis typis noua haberi in Euclidem Commentaria, quibus præ alijs author (Gentilitio ibidem nuncupatus) de immissione duarum inter datas lineas proportionalium, nec non de trisecando angulo tractatum pleniorem addidisset, tùm *Riccardus* iuxta veteres, tùm iuxta recentiores, &c. quo circa ob argumenti symbolum, conceperam consentaneum fore nostri opusculi continere progressum, vel ad vsque liceret exemplar inspicere, quod quidem in Vrbe, aut alias citra montes, vbi commertia habentur vberiora minimè repertum. Commodùm nostra solicitudo vltra se extenderat, & per Venetos bibliopolas ad nundinas Franc-

fur-

furtenses, vndè spes in vnis facta assequuturum ex subsequentibus (teneri porrò conuentos illi bis in anno nemo nescit) at postea in nihilum resoluta fuit. Institores etenim minimè reperisse renunciarunt, quibus non potuimus fidem non adhibere, quos tamen immunes minimè fecerant, negligentia, aut obliuione simul opinio, seu suspicio, interdicta enim non videbantur, causa armorum inferioris, ac superioris Germaniæ commertia. Verum quocumque res se habuisset nos nec vni eramus loco addicti (res enim vrgebat), nec destitutos vno suo crine nos reliquit volubilis occasio. Contigit namque vnicum fuisset exemplar Genuam delatum, & ibidem qui meæ indigentiæ inuigilabat occursum, recepit, & qua licuit celeritate transmisit, videlicet, nulli parcendo, per consuetum tabellarium. Itaque post multum laboris, ac temporis plurimum, voti compos effectus, exploratum illicò habui, quàm res à conceptu distaret meo, & quàm sobriè oporteat relatis se committere alienis. Etenim author aliás doctus, & apprimè accuratus, ad ea tantùm, quæ in commentarijs habentur Eutocij apud Archimèdem collecta veterum pro hoc argumento inuenta, per pauca apposuerat, & consimili à geometrico affecta, præterea quod adhuc minus approbandum censuimus, eorum fuit omnium repetitio, quum in maiorem cedere videatur facul-

tatis

tatis iniuriam, ex quo nihil aliud velint, qui eadem inculcant, quàm in faciem exprobare Geometriæ impotentiam, & consequenter ex eorum mente necesse fiat, ex antiqua serie adeò propagata, istis à geometricis toties iteratis locus demùm relinqui imperturbatus; quod sanè nos adhuc imperterriti è regione contendimus extra purioris Geometriæ castra oportere explodi, ac suis nationibus restitui, ac remitti; quare si nostra non corruant, oppugnatores perpendant argumentum à se inductum, à maiori ad minus negatiuum, ex dialecticis, quomodo concludant, deindè ea, quæ ad cheimeras, ignorantiæ ergo, tumida exprobatione remiserant, si breui viderint ex familia Geometriæ fuisse, sequetur ipsis vbi nunquam radijs sol collustret tenebras deberi Cymerias. Nos verò desertam hanc, qui ingressi fuimus prouinciam perlustrandam, quæ accidere discrimina possent perpendentes, cadere animis in eorum contingentia, minimè debuimus, quasi immeditata euenerint; deinceps qui sanè, nostrum animi propositum, ad temeritatem, aut fastum ausi sint referre vtique ex moribus proprijs, & temperamenti dispositione, aliena fallaciter iudicant, ac dimetiuntur. Non equidem illorum ductu, at cultu simpliciter veritatis, ac Geometricæ necessitatis amore compulsi, omnibus quę indiuiduum respiciant neglectis in aciem non pro-

prodire renuimũs, & hæc optimè STELLVTE in noſtræ veteris amicitiæ monumentum tecum agere conſtitui, cùm pro tua humanitate, & erga me beneuolentia æquè bonique conſulere ambigere nequeam. Vale.

A. S.

Fol. 3. lin. 9.	*Lege.*
DG est differentia	*D G Q est differentia quadrati F H*
21. 16. *vsa fuit*	*visa fuit*
43. 9. & 13. *A L*	*A F*
46. 9. *quat.*	*queat.*

& pauca alia leuiora si occurrant facilè excusari possunt; verum luxata quædam in figuris adnotasse præstat, nempè

folio 17. *in secunda figura L exculpi debuit, quò M in F linea peripheriam secet, & B L, L C iungi.*

24. *pro casu secundo, linea 9 à fine, schema substituatur ex errore locatum folio 29., ex figura hexagona enim naturalitèr fit problema.*

33. *in figura Pappi permutatim accipias K cum N.*

abundat deinde M in figura paginæ 25.